

MATHEMATIQUES
(Voie économique)

DURÉE : 4 HEURES
Coefficient 5

EXERCICE I

Une urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches

1° Un joueur tire successivement 5 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
S'il tire une boule blanche il gagne deux points, dans le cas contraire il perd 3 points.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par le joueur en une partie.

a) Dresser le tableau définissant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer E(X) et V(X), respectivement espérance et variance de X.

c) En faisant le bilan, sachant que le joueur est gagnant à l'issue du jeu, quelle est la probabilité qu'il ait tiré au plus 5 boules blanches ?

2° On se place maintenant dans le cas où le joueur tire dans l'urne les 5 boules simultanément, les dix boules de l'urne étant numérotées de 1 à 10.

a) Soit Y la variable aléatoire réelle égale au plus grand des numéros tirés, déterminer la loi de probabilité de Y et calculer E(Y).

b) Soit T la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
Après ce premier tirage le joueur remet les boules noires obtenues dans l'urne et garde les boules blanches, puis effectue à nouveau un tirage simultané de 5 boules.
On appelle Z la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors du second tirage.
Déterminer les lois de probabilité de T et Z, et calculer E(T).

EXERCICE II

A la surface d'un étang une grenouille se déplace sur 3 nénuphars X, Y, et Z de la façon suivante :

- si elle est sur X, elle saute sur Y avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou sur Z avec la probabilité $\frac{2}{3}$,
- si elle est sur Y, elle saute sur X avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur Z avec la probabilité $\frac{1}{3}$,
- si elle est sur Z, elle saute sur X avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou sur Y avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

La grenouille effectue son premier saut à partir du nénuphar X et on note X_n (respectivement Y_n, respectivement Z_n) les évenements :
<< à l'issue du $n^{ième}$ saut la grenouille se trouve sur le nénuphar X (respectivement Y, respectivement Z) >> .

1° On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Démontrer que si on note : $A_n = \begin{pmatrix} p(X_n) \\ p(Y_n) \\ p(Z_n) \end{pmatrix}$, alors on a : $A_{n+1} = \left(\frac{1}{3}M\right)A_n$

($p(X_n)$ étant la probabilité que la grenouille se trouve sur le nénuphar X à l'issue du $n^{ième}$ saut).

TOURNEZ la page S.V.P.

2° On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que M peut s'exprimer comme combinaison linéaire de J, K et I.

b) Calculer $J(K-I)$; $(K-I)J$ et exprimer J^n en fonction de J $(n \in \mathbb{N}^*)$.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = 3^{n-1} J + (K-I)^n$.

3° On considère les sommes $S_1 = \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{3})} C_n^{3p} (-1)^{n-3p}$,

$S_2 = \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{3})} C_n^{3p+1} (-1)^{n-(3p+1)}$, et : $S_3 = \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{3})} C_n^{3p+2} (-1)^{n-(3p+2)}$

($E(\frac{n}{3})$ désignant la partie entière de $\frac{n}{3}$; on conviendra d'autre part que m et n étant deux entiers naturels si : $m > n$, alors : $C_n^m = 0$).

a) Montrer que : $(K-I)^n = S_1 I + S_2 K + S_3 K^2$.

b) En admettant que : $S_1 = \frac{2}{3} (\sqrt{3})^n \cos \frac{5n\pi}{6}$,

et : $S_2 = \frac{2}{3} (\sqrt{3})^n \cos \frac{(5n+8)\pi}{6}$,

calculer S_3, en déduire l'expression de M^n et conclure en calculant $p(X_n)$, $p(Y_n)$, $p(Z_n)$.

PROBLEME

Première partie

On considère la fonction f définie de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \text{et} \\ \forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = \frac{\sin x}{x} \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) Après avoir justifié la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$, calculer pour tout réel x strictement positif $f'(x)$.

3) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $]0 ; 4\pi]$ trois solutions que l'on notera α_1, α_2, α_3 $(\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3)$ et dont on déterminera des valeurs approchées à 10^{-1} près)
(on pourra poser $\theta : x \longmapsto x \cos x - \sin x$, et utiliser les variations de cette fonction).

4) En déduire les variations de la fonction f sur $[0 ; 4\pi]$ et construire sa représentation graphique ainsi que celles des fonctions :

$h : \begin{array}{ccc} [1, 4\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ et $k : \begin{array}{ccc} [1, 4\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{x} \end{array}$

dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(0 ; \vec{I}, \vec{J})$, l'unité étant 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

A SUIVRE

Deuxième partie

On considère la fonction F : $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$

1) Justifier l'existence de F sur $\mathbb{R}^+$.

2) On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,dt$.

a) Après avoir justifié l'existence de a_n montrer que : $a_n = \int_0^{\pi} f(n\pi+t)\,dt$.

b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le a_{2n} + a_{2n+1} \le \frac{1}{4n^2}$.

3) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\frac{1}{n^2} \le \int_{n-1}^{n} (\frac{1}{t^2})\,dt$, et en déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4) Après avoir justifié son existence, démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $I_n = \int_0^{2n\pi} f(t)\,dt$ est convergente.

On notera L sa limite.

5) a) Montrer que si : $x \in [\,2n\pi\,;\,(2n+1)\pi\,[$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $I_n \le F(x) \le I_n + \frac{1}{2n}$.

b) Montrer que si : $x \in [\,(2n+1)\pi\,;\,(2n+2)\pi\,[$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $I_{n+1} \le F(x) \le I_n + \frac{1}{2n}$

(on pourra utiliser sans le démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(1+x) < x$).

c) En déduire alors que F admet une limite finie en $+\infty$.

Troisième partie **Calcul de L**

1° Soient a et b deux nombres réels, $a < b$, et soit f_1 une fonction numérique de variable réelle, dérivable sur $[\,a\,,\,b\,]$, de fonction dérivée continue sur $[\,a\,,\,b\,]$.

On pose : $I_n(f_1) = \int_a^b f_1(t)\sin nt\,dt \quad n \in \mathbb{N}^*$.

A l'aide d'une intégration par parties correctement justifiée, démontrer que :
$\lim_{n\to+\infty} I_n(f) = 0$.

2° On considère la fonction θ_n définie par : $\begin{cases} \theta_n(0) = 2\pi \\ \text{et} \\ \forall\, t \in]0,\pi],\ \theta_n(t) = \dfrac{\sin 2nt}{2\sin\frac{t}{2}} \cdot \cos\dfrac{t}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

TOURNEZ la page S.V.P.

a) Justifier l'existence de $J_n = \int_0^{\pi} \theta_n(t)\,dt$.

b) Du calcul de $\sum_{k=1}^{2n} \sin(k+\frac{1}{2})t - \sum_{k=1}^{2n} \sin(k-\frac{1}{2})t$, $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0;\pi]$,

démontrer que : $\sin(2n+\frac{1}{2})t - \sin\frac{t}{2} = (2\sin\frac{t}{2})\sum_{k=1}^{2n} \cos kt$

(on rappelle que : $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$).

En déduire que : $\theta_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n} \cos kt - \frac{1}{2}\cos 2nt$, $t \in [0;\pi]$.

c) En déduire la valeur de J_n.

3° Soit : $n \in \mathbb{N}^*$; on considère la fonction φ_n définie par : $\begin{cases} \varphi_n(0) = 2n \\ \text{et} \\ \forall\, t \in]0,\pi] \ , \ \varphi_n(t) = \dfrac{\sin 2nt}{t} \end{cases}$

a) Justifier l'existence de $K_n = \int_0^{\pi} \varphi_n(t)\,dt$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité en 0 de la fonction f_1 définie par :

$$\begin{cases} f_1(t) = \dfrac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t} \quad , \quad \forall\, t \in]0;\pi] \\ \text{et} \\ f_1(0) = 0. \end{cases}$$

c) En utilisant la question précédente ainsi que la question 1 , démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0.$$

4° En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

FIN .·.